I. Conocimientos básicos algebraicos

1. Factoriza completamente los siguientes polinomios.

1.1 $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2$

Factorizar *completamente* un polinomio es expresarlo como producto de factores primos. Para ello se aplican distintas técnicas como: factor común, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, etc.

Sacamos factor común $2x^2$:

$$P(x) = 2x^2(x^2 + \tfrac{1}{2}x - 3)$$

Hallamos las raíces del polinomio de 2° grado $x^2 + \dfrac{1}{2}x - 3$ a través de la fórmula resolvente: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$. Con: $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$ y $c = -3$, resulta:

$$x_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \ \text{ y } \ x_2 = -2$$

Así, el polinomio completamente factorizado es:

$$P(x) = 2x^2(x - \frac{3}{2})(x + 2)$$

1.2 $P(x) = 3x^2 - \dfrac{6}{5}x + \dfrac{3}{25}$

Siendo $P(x)$ un polinomio de 2° grado, obtenemos sus raices $x_1 = \dfrac{1}{5}$; $x_2 = \dfrac{1}{5}$ por resolvente; entonces se puede escribir:

$$P(x) = 3(x - \frac{1}{5})^2$$

Recordar que en la factorización completa del polinomio se deben multiplicar los factores primos por el coeficiente principal (en este caso 3).

1.3 $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$, sabiendo que es divisible por x+1.

Observamos que P(x) tiene a x como factor común; por lo tanto:

$$P(x) = x(x^3 - 3x^2 + 4)$$

Puesto que P(x) es divisible por $x + 1$, se deduce que -1 es raíz. Entonces, aplicamos Ruffini al polinomio de 3° grado, obteniendo:

$$P(x) = x(x+1)(x^2 - 4x + 4)$$

El 3º factor es un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP), esto significa que se puede escribir como el cuadrado de un binomio. Así:

$$P(x) = x(x+1)(x-2)^2$$

1.4 $P(x) = 5x^3 - 10x^2 - 15x + 30$, sabiendo que 2 es una raíz

Extraemos el factor común 5:

$$P(x) = 5(x^3 - 2x^2 - 3x + 6)$$

Como 2 es una raíz, aplicamos Ruffini:

$$P(x) = 5(x-2)(x^2 - 3)$$

El último factor es una diferencia de cuadrados:

$$P(x) = 5(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

2. Determina el valor de verdad de cada enunciado y justifica tu respuesta.

2.1 $P(x) = x^4 - x^2$ tiene raíz simple x=0

Es falso. Al factorizar, obtenemos:

$$P(x) = x^2(x^2 - 1) \Rightarrow P(x) = x^2(x-1)(x+1)$$

La raíz 0 es doble; la raíz 1 es simple; la raíz -1 es simple.

2.2 $m^{\frac{1}{2}} m^3 m^{\frac{-1}{3}} = m^{\frac{23}{6}}$

Es falso. Al sumar los exponentes de las potencias de la misma base, se obtiene:

$$m^{\frac{1}{2}}.m^3.m^{\frac{-1}{3}} = m^{\frac{1}{2}+3-\frac{1}{3}} = m^{\frac{19}{6}}$$

2.3 $\log_a x + \log_a y = \log_a x . \log_a y$

Es falso. Usando propiedades de logaritmo: $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

2.4 $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x-2$

Es falso. Aplicando diferencia de cuadrados en el numerador y simplificando, el resultado es x+2, siempre que x sea distinto de 2. En símbolos:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = x+2 \ ; \ x \neq 2$$

2.5 $x^2-4 = (x-2)(x-2)$

Es falso. El primer miembro es una diferencia de cuadrados $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

2.6 $(x^3-2)^2 = x^6-4$

Es falso. Desarrollando el cuadrado del binomio, se obtiene:

$$(x^3-2)^2 = (x^3)^2 - 2.x^3{,}2 + 4$$
$$(x^3-2)^2 = x^6 - 4x^3 + 4$$

2.7 $12,35 \cdot 10^{-2}$ es la notación científica del número 0,1235

Es falso. La notación científica es $1{,}235 \cdot 10^{-1}$. (Recordar: la notación científica es de la forma: $m \cdot 10^n$, siendo m la mantisa la cual debe ser mayor o igual que 1 y menor que 10).

2.8 $\left(\dfrac{3^{1-3x}}{3^x}\right)^2 = 9^{2-8x}$

Es falso porque si aplicamos las propiedades distributiva de la potencia con respecto a la división y cociente de potencias de igual base, nos queda:

$$\left(\frac{3^{1-3x}}{3^x}\right)^2 = \frac{3^{2-6x}}{3^{2x}} = 3^{2-6x-2x} = 3^{2-8x}$$

2.9 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 2(a+b)$ con a,b ≥ 0

Es verdadero. Desarrollando los cuadrados de binomios, se obtiene:

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 =$

$a + 2\sqrt{a.b} + b + a - 2\sqrt{a}.b + b = 2a + 2b = 2(a+b)$

2.10 No existe el inverso multiplicativo de $\sqrt{5}$.

Es falso. El inverso multiplicativo de $\sqrt{5}$ es $\frac{1}{\sqrt{5}}$ porque $\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}} = 1$

3. Calcula las raíces de los siguientes polinomios.

Las raíces son los valores de x que anulan los factores.

3.1 $P(x) = (2x-1)(x-3)(4x+4)$

Raíces: $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$ (todas simples).

3.2 $Q(x) = 4(3x-9)(x-3)(x+8)$

Raíces: $x_1 = 3$, multiplicidad 2 ; $x_2 = -8$, raíz simple.

3.3 $T(x) = (x-1)(2x-3)(x-4)$

Raíces: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{3}{2}$; $x_3 = 4$ (todas simples)

4. Reduce a la mínima expresión e indica restricciones de la variable.

4.1 $\dfrac{9-5x}{x^2-2x} - \dfrac{x-5}{x-2}$ Factorizamos x^2-2x aplicando factor común:

$$\frac{9-5x}{x(x-2)} - \frac{x-5}{x-2}$$

Resolvemos la resta de fracciones; teniendo en cuenta que el mínimo común múltiplo es $x(x-2)$:

$$\frac{9-5x-(x-5)x}{x(x-2)} =$$
$$\frac{9-5x-x^2+5x}{x(x-2)} =$$
$$\frac{9-x^2}{x(x-2)}$$

Restricciones: $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

4.2 $\dfrac{3x-4}{x^2-9} - \dfrac{x}{x+3} - \dfrac{x}{x-3}$

Factorizamos la diferencia de cuadrados y operamos sacando como denominador común el mínimo común múltiplo entre los denominadores:

$$\frac{3x-4}{(x-3)(x+3)} - \frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} =$$
$$\frac{3x-4-x(x-3)-x(x+3)}{(x-3)(x+3)} =$$
$$\frac{3x-4-x^2+3x-x^2-3x}{(x-3)(x+3)} =$$
$$\frac{-2x^2+3x-4}{(x-3)(x+3)}$$

Restricciones: $x \neq 3$ y $x \neq -3$.

4.3 $\dfrac{x^2-5x+6}{4x^2-9} : \dfrac{2x-4}{2x+3}$

Las restricciones de la variable para esta expresión son: $x \neq \frac{3}{2}; x \neq -\frac{3}{2}; x \neq 2$.

Factorizamos y reescribimos la división como multiplicación:

$$\frac{(x-3)(x-2)}{(2x-3)(2x+3)}.\frac{2x+3}{2(x-2)}$$

Al simplificar obtenemos:

$$\frac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{(2x-3)\cancel{(2x+3)}}.\frac{\cancel{2x+3}}{2\cancel{(x-2)}}=\frac{x-3}{2(2x-3)}$$

4.4 $\dfrac{3\left(x+2\right)^{2}\left(x-3\right)^{2}-\left(x+2\right)^{3}\left(2\right)\left(x-3\right)}{\left(x-3\right)^{4}}$

Los factores comunes en el numerador son $(x-3)$ y $(x+2)^2$; al extraerlos, obtenemos:

$$\frac{(x+2)^2(x-3)[3(x-3)-2(x+2)]}{(x-3)^4}=$$
$$\frac{(x+2)^2(3x-9-2x-4)}{(x-3)^3}=$$
$$\frac{(x+2)^2}{(x-3)^3}(x-13)$$

La restricción es $x\neq 3$.

4.5 $\dfrac{2\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}-x\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}}}{x+1}$

Para obtener la restricción de la variable reflexionamos lo siguiente: como (1+x) está afectado a un exponente fraccionario (lo que supone una raíz), debe ser 0 o positivo, pero la presencia del exponente negativo $-\frac{1}{2}$ impide que sea 0; por lo tanto, $x+1>0\Rightarrow x>-1$.

Sacamos factor común $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}[2(x+1)-x]}{x+1}$$

Resolvemos la división entre potencias de igual base (recordar que $1+x=x+1$) y desarrollamos la operación indicada entre corchetes:

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}}(2+x)$$

La expresión equivalente con exponente positivo es:

$$\frac{2+x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

4.6 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{\left(x+1\right)^{2}}+\dfrac{3}{x^{2}-1}$

$$\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=$$
$$\frac{(x+1)(x-1)-2(x-1)+3(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}=$$
$$\frac{x^2-1-2x+2+3x+3}{(x+1)^2(x-1)}=$$
$$\frac{x^2-x+4}{(x+1)^2(x-1)}$$

La restricciones son $x \neq 1; x \neq -1$.

5. Racionaliza las siguientes expresiones.

5.1 $\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$

Racionalizar una expresión que contenga radicales en el denominador (numerador) es transformarla en otra equivalente donde las raíces se presenten en el numerador (denominador). Para ello, se multiplica numerador y denominador por el conjugado de la expresión que quiere racionalizarse, en este caso el conjugado es $\sqrt{x}+2$.

$$\frac{3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=$$
$$\frac{3(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=$$
$$\frac{3(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=$$
$$\frac{3(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$

Las restricciones son $x \geqslant 0$ y $x \neq 4$.

5.2 $\dfrac{7}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$

$$\frac{7.(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}=$$
$$\frac{7.(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x+1})^2}=$$
$$\frac{7.(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{x-x-1}=$$
$$-7.(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$$

Para que existan en $\mathbb{R}$ ambas raíces es necesario que se satisfagan a la vez las siguientes condiciones:

$$x \geqslant 0 \;\text{ y }\; x+1 \geqslant 0\text{; equivalentemente, } x \geqslant 0.$$

II. Ecuaciones e Inecuaciones

1. Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones. Verifica las ecuaciones. Escribe en todos los casos el conjunto solución.

Resolver una ecuación es encontrar el/los valor/es de la incógnita (en el conjunto de los números reales) que satisfacen la igualdad. *Verificar* significa reemplazar la incógnita por cada valor hallado y comprobar la igualdad originalmente planteada.

1.1 $5^{x+1} = 2.3^{2x}$

Aplicamos logaritmo de base e miembro a miembro:

$$\ln(5^{x+1}) = \ln(2 \cdot 3^{2x})$$

Por propiedades de logaritmos, tenemos:

$$(x+1)\ln 5 = \ln 2 + 2x.\ln 3$$
$$(\ln 5)x + \ln 5 = \ln 2 + 2x.\ln 3$$
$$x \ln 5 - 2x.\ln 3 = \ln 2 - \ln 5$$
$$x(\ln 5 - 2\ln 3) = \ln 2 - \ln 5$$
$$x = \frac{\ln 2 - \ln 5}{\ln 5 - 2\ln 3} = \frac{\ln \frac{2}{5}}{\ln \frac{5}{9}}$$
$$CS = \left\{ \frac{\ln \frac{2}{5}}{\ln \frac{5}{9}} \right\}$$

Para verificar, comprueba utilizando calculadora o computadora la siguiente igualdad:

$$5^{\frac{\ln \frac{2}{5}}{\ln \frac{5}{9}}+1} = 2.3^{2\cdot\frac{\ln \frac{2}{5}}{\ln \frac{5}{9}}}$$

1.2 $\ln(x+5) - \ln 2 = \ln(x-1) + \ln 3$

$$\ln(x+5) - \ln(x-1) = \ln 3 + \ln 2$$
$$\ln(\tfrac{x+5}{x-1}) = \ln 3 + \ln 2$$
$$\ln(\tfrac{x+5}{x-1}) = \ln(3 \cdot 2)$$

Cancelando los logaritmos miembro a miembro, obtenemos:

$$\tfrac{x+5}{x-1} = 6$$
$$x + 5 = 6x - 6$$
$$-5x = -11 \to x = \tfrac{11}{5}$$

$$CS = \{\tfrac{11}{5}\}$$

Verificación:

$$\ln(\tfrac{11}{5}+5) - \ln 2 \overset{?}{=} \ln(\tfrac{11}{5}-1) + \ln 3$$
$$\ln(\tfrac{36}{5} : 2) \overset{?}{=} \ln(\tfrac{6}{5} \cdot 3)$$
$$\ln 3,6 = \ln 3,6$$

1.3 $2 = \log_3(3x+2)$

Al aplicar la definición de logaritmo, obtenemos la expresión equivalente:

$$3x + 2 = 3^2$$
$$3x = 9 - 2$$
$$x = \tfrac{7}{3}$$
$$CS = \{\tfrac{7}{3}\}$$

Verificación:

$$2 \overset{?}{=} \log_3(3.(\tfrac{7}{3}) + 2)$$
$$2 = \log_3(9)$$

1.4 $e^{x^2} - e^{2x} = 0$

$$e^{x^2} = e^{2x}$$

Como las bases son iguales, los exponentes también lo son. Así:

$$x^2 = 2x$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 2$$
$$CS = \{0, 2\}$$

1.5 $\dfrac{3-24x}{10} - \dfrac{1-2x}{2} = \dfrac{-1}{10}(3x-4)$

Sacamos denominador común en el primer miembro y distribuimos el producto en el segundo:

$$\frac{3-24x-5(1-2x)}{10} = -\frac{3}{10}x + \frac{2}{5}$$
$$\frac{3-24x-5+10x}{10} = -\frac{3}{10}x + \frac{2}{5}$$

Operando y distribuyendo:

$$-\frac{2}{10} - \frac{14x}{10} = -\frac{3}{10}x + \frac{2}{5}$$

Agrupando los términos semejantes en ambos miembros y operando:

$$-\frac{2}{10}-\frac{2}{5}=-\frac{3}{10}x+\frac{14x}{10}$$
$$-\frac{3}{5}=\frac{11}{10}x$$

Despejando la incógnita, se obtiene:

$$\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{11}{10}}=x$$
$$-\frac{6}{11}=x$$
$$CS=\left\{-\tfrac{6}{11}\right\}$$

Para verificar, al reemplazar x en el primer miembro de la ecuación original y resolver la operación, nos queda:

$$\frac{3-24\cdot(-\frac{6}{11})}{10}-\frac{1-2\cdot(-\frac{6}{11})}{2}=\frac{31}{55}$$

Haciendo lo mismo en el segundo miembro, resulta:

$$\frac{-1}{10}(3\cdot(-\tfrac{6}{11})-4)=\frac{31}{55}$$

1.6 $2(x-3)\leq 5$

$$x-3\leq \tfrac{5}{2}$$
$$x\leq \tfrac{5}{2}+3$$
$$x\leq \tfrac{11}{2}$$
$$CS=\left(-\infty,\tfrac{11}{2}\right]$$

1.7 $\dfrac{1}{6}-3\left(-\dfrac{2}{9}+1\right)x<-\dfrac{1}{10}$

$$\tfrac{1}{6}-\tfrac{7}{3}x<-\tfrac{1}{10}$$
$$-\tfrac{7}{3}x<-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{6}$$
$$x>\frac{-\frac{4}{15}}{-\frac{7}{3}}$$
$$x>\frac{4}{35}$$
$$CS=\left(\tfrac{4}{35};+\infty\right)$$

1.8 $e^x x-2e^x=0$

Expresando en forma equivalente, escribimos:

$$e^x x = 2e^x$$

Aplicamos logaritmo neperiano miembro a miembro y hacemos uso de las propiedades del mismo:

$$x \ln e + \ln x = \ln 2 + x \ln e$$

$$x + \ln x = \ln 2 + x \text{ (ya que } \ln e = 1)$$

Reunimos los términos que contienen la incógnita:

$$x - x + \ln x = \ln 2$$

$$\cancel{x} - \cancel{x} + \ln x = \ln 2$$

Cancelando los logaritmos miembro a miembro, nos queda:

$$x = 2$$

Otra forma:

Sacamos factor común e^x:

$$e^x.(x-2) = 0$$

Como $e^x \neq 0$; entonces $(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

$$CS = \{2\}$$

1.9 $x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{-1}{2}} = 0$

Sacamos factor común $x^{\frac{1}{2}}$:

$$x^{\frac{1}{2}}.(x - 6 + 9.x^{-1}) = 0$$

$$x^{\frac{1}{2}}.(x - 6 + \tfrac{9}{x}) = 0$$

Podemos advertir que para que la expresión tenga sentido x debe ser un número positivo, ya que $x^{\frac{1}{2}}$ no tiene resultado real y x^{-1} no está definido para x=0.

Sacamos denominador común x en el segundo factor:

$$x^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{x^2 - 6x + 9}{x}\right) = 0$$

Escribimos como cuadrado de un binomio y dividimos las x: $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$$\frac{(x-3)^2}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Al pasar multiplicando $x^{\frac{1}{2}}$, obtenemos:

$$(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$CS = \{3\}$$

1.10 $2x \ln x + x = 0$

Extraemos factor común x:

$$x(2\ln x + 1) = 0$$

Aplicando la propiedad del producto nulo, obtenemos:

► $x = 0$ (no puede ser porque el dominio de la ecuación es $\mathbb{R}^+$)

► $2\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

$$CS = \left\{e^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

1.11 $\dfrac{9-5x}{x^2-2x} - \dfrac{x-5}{x-2} = 0$ Restricciones: $x \neq 2$; $x \neq 0$.

$$\frac{9-5x}{x(x-2)} - \frac{x-5}{x-2} = 0$$
$$\frac{9-5x-(x-5)x}{x(x-2)} = 0$$
$$\frac{9-5x-x^2+5x}{x(x-2)} = 0$$
$$\frac{9-x^2}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow (-x+3).(-x-3) = 0, \text{ entonces:}$$
$$x = 3 \ \vee \ x = -3$$

$CS = \{3; -3\}$

1.12 $4x^5 = x^3$

$$4x^5 - x^3 = 0$$

$$x^3.(4x^2 - 1) = 0$$

Aplicando la propiedad del producto nulo, obtenemos:

► $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

► $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

$$CS = \left\{0; \pm\tfrac{1}{2}\right\}$$

1.13 $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{2}x$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{10} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{2-15}{20}$$

$$\frac{3}{4}x = -\frac{13}{20}$$

$$x = -\frac{13}{20}.\frac{4}{3}$$

$$x = -\frac{13}{5}.\frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{13}{15}$$

$CS = \left\{-\frac{13}{15}\right\}$

1.14 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

$$\sqrt[3]{x} = \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{4}\right).\frac{4}{3}$$
$$x = \left(\frac{1}{4}.\frac{4}{3}\right)^3$$
$$x = \frac{1}{27}$$

$CS = \left\{\frac{1}{27}\right\}$

2. Resuelve y representa gráficamente la solución.

2.1 $|x-1| < 2$

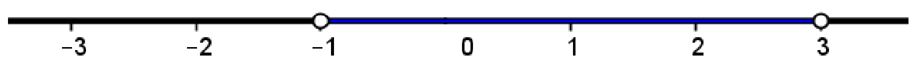
Aplicamos propiedad del valor absoluto y escribimos la inecuación como una doble desigualdad:

$$-2 < x - 1 < 2$$

$$-2 + 1 < x < 2 + 1$$

$$-1 < x < 3$$

$CS = (-1; 3)$

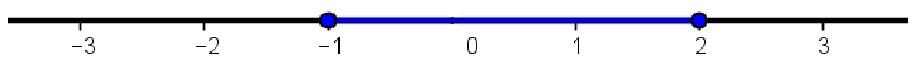


2.2 $|1-2x| \leq 3$

$$-3 \leq 1-2x \leq 3$$
$$-3-1 \leq -2x \leq 3-1$$
$$-4 \leq -2x \leq 2$$
$$2 \geq x \geq -1$$

En el último paso, al dividir miembro a miembro por -2, se cambia el sentido de la desigualdad.

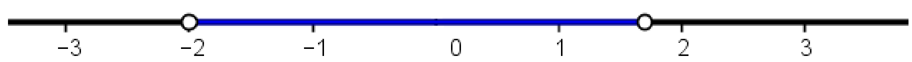
$CS = [-1; 2]$



2.3 $\left|\frac{3}{2}x+1\right| < 2$

$$-2 < \frac{3}{2}x+1 < 2$$
$$-2-1 < \frac{3}{2}x < 2-1$$
$$(-3).\frac{3}{2} < x < 1.\frac{2}{3}$$
$$-2 < x < \frac{2}{3}$$

$CS = \left(-2; \frac{2}{3}\right)$



III. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

1. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales y exprese el conjunto solución (CS).

1.1 $\begin{cases} 3x - 2y = -16 \\ 5x + 4y = 10 \end{cases}$

Despejamos y de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 16 = 2y \\ 5x - 10 = -4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + 8 = y \\ -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2} = y \end{cases}$$

Igualando ambos miembros:

$$\frac{3}{2}x + 8 = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$$
$$8 - \frac{5}{2} = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}x$$
$$\frac{11}{2} = -\frac{11}{4}x$$
$$x = \frac{11}{2}.(\frac{-4}{11})$$
$$x = \frac{-4}{2} = -2$$
$$y = \frac{3}{2}.(-2) + 8$$
$$y = 5$$
$$CS = \{(-2; 5)\}$$

1.2 $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

Despejamos y de la segunda ecuación:

$$y = \frac{2}{3}x$$

Reemplazamos $y = \frac{2}{3}x$ en la primera ecuación:

$$3x - 4(\frac{2}{3}x) = 1$$
$$3x - \frac{8}{3}x = 1$$
$$\frac{1}{3}x = 1$$
$$x = 3$$

por lo tanto:

$$y = \frac{2}{3}.(3) \Rightarrow y = 2$$
$$CS = \{(3;2)\}$$

1.3 $\begin{cases} 3x + 3y = -6 \\ 2x - 5y = -11 \end{cases}$

Despejamos x de la primera ecuación:

$$x = -2 - y$$

Reemplazamos x en la segunda ecuación:

$$2.(-2 - y) - 5y = -11$$
$$-4 - 2y - 5y = -11$$
$$-7y = -7$$
$$y = 1 \therefore x = -2 - 1 \Rightarrow x = -3$$
$$CS = \{(-3;1)\}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

2.1 $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y + x = 3 \end{cases}$

Despejamos y de la segunda ecuación: $y = 3 - x$

Reemplazamos y en la primera ecuación

$$3 - x = x^2 - 4x + 3$$
$$0 = x^2 - 3x$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 3$$
$$x = 3 \Rightarrow y = 0$$
$$CS = \{(3,0);(0,3)\}$$

2.2 $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

Igualamos las ecuaciones:

$$1 - x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
$$0 = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Aplicamos la resolvente para: $a = 1$; $b = \dfrac{1}{2}$; $c = -\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - 4.(1).(-\frac{1}{2})}}{2} =$$

$$\frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} =$$

$$\frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} =$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = 1 - (\tfrac{1}{2})^2 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 1 - (-1)^2 \Rightarrow y = 0$$

$$CS = \left\{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}); (-1, 0)\right\}$$

2.3 $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$

Igualamos las ecuaciones:

$$x^2 - 2x = 4 - x^2$$

$$x^2 + x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

Aplicamo la resolvente para: $a = 2$; $b = -2$; $c = -4$

$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - (-32)}}{4} =$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} =$$

$$\frac{2 \pm 6}{4} =$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 4 - (2)^2 \Rightarrow y = 0$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 4 - (-1)^2 \Rightarrow y = 3$$

$$CS = \{(2, 0); (-1, 3)\}$$

3. Determina el punto de equilibrio entre las funciones de oferta y demanda. Representa gráficamente.

3.1 $\begin{cases} p = -q^2 + 36 \\ p = 3q^2 + 4q + 12 \end{cases}$

Igualamos ambas ecuaciones:

$$-q^2 + 36 = 3q^2 + 4q + 12$$
$$0 = 4q^2 + 4q - 24$$

Aplicamos resolvente para: $a = 4$; $b = 4$; $c = -24$:

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 16.(-24)}}{8} =$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{400}}{8} =$$

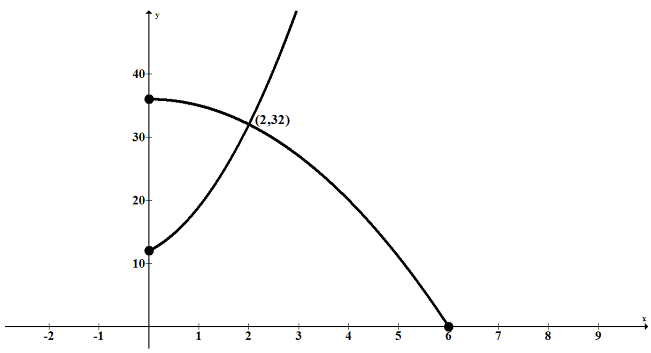
$$\frac{-4 \pm 20}{8} =$$

$$q_1 = 2 \Rightarrow p = 3(2)^2 + 4.(2) + 12 = 32$$

$$q_2 = -3 \Rightarrow \text{esta solución se descarta porque no existen cantidades negativas}$$

El punto de equilibrio es:

$$P = (2; 32)$$



$$3.2 \begin{cases} p = \dfrac{3240}{q+20} \\ \\ p = \dfrac{1}{5}q + 7 \end{cases}$$

Igualamos ambos miembros y operamos:

$$\frac{3240}{q+20} = \tfrac{1}{5}q + 7$$

$$3240 = (\tfrac{1}{5}q + 7).(q + 20)$$

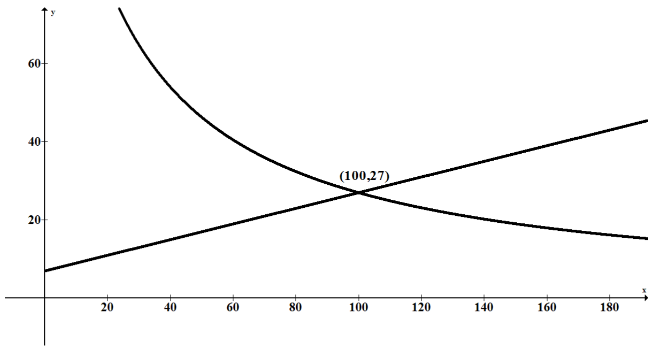
$$0 = \tfrac{1}{5}q^2 + 11q - 3100$$

Aplicamos resolvente: $a = \frac{1}{5}$; $b = 11$; $c = -3100$

$$\frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4.(\frac{1}{5}).(-3100)}}{2.(\frac{1}{5})} =$$
$$\frac{-11 \pm \sqrt{2601}}{\frac{2}{5}} =$$
$$\frac{-11 \pm 51}{\frac{2}{5}} =$$
$$q_1 = 100 \Rightarrow p = \frac{3240}{100 + 20} \Rightarrow p = 27$$
$$q_2 = -155 \Rightarrow \text{se descarta por ser negativa}$$

El punto de equilibrio es:

$$P = (100; 27)$$



3.3 $\begin{cases} p = \sqrt{q + 10} \\ p = 20 - q \end{cases}$

Igualamos y elevamos al cuadrado ambos miembros:

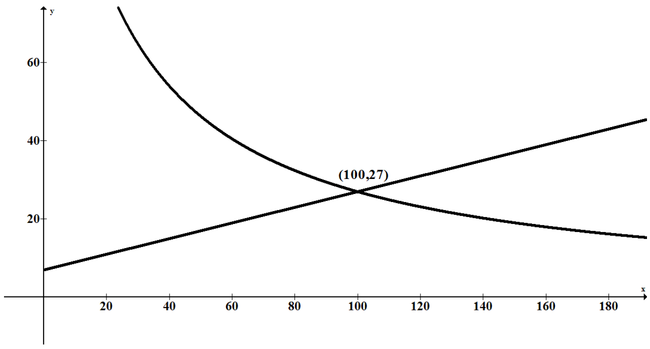
$$\sqrt{q + 10} = 20 - q$$
$$q + 10 = (20 - q)^2$$
$$q + 10 = 400 - 40q + q^2$$
$$0 = q^2 - 41q + 390$$

Aplicamos resolvente: $a = 1$; $b = -41$; $c = 390$

$$\frac{41 \pm \sqrt{(-41)^2 - 1560}}{2} =$$
$$\frac{41 \pm \sqrt{121}}{2} =$$
$$\frac{41 \pm 11}{2}$$
$$q_1 = 26 \Rightarrow p_1 = 20 - 26 \Rightarrow p = -6 \Rightarrow \text{Se descarta por ser el precio negativo}$$
$$q_2 = 15 \Rightarrow p_2 = 20 - 15 = 5$$

El punto de equilibrio es:

$$P = (15; 5)$$



4. Determina y representa gráficamente el dominio de las siguientes funciones.

4.1 $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$

Restringiendo el radicando (no negativo) planteamos:

$$x + 1 \geq 0$$
$$x \geq -1$$

Por tanto

$$Df(x) = \{x\epsilon\mathbb{R}/x \geq -1\} = [-1, +\infty)$$

4.2 $f(x) = \dfrac{1}{\log(x+3)}$

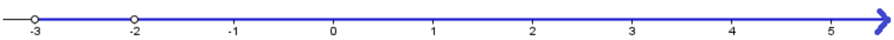
Limitamos el dominio planteando a) y b):

a) $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$

b) Para que $\log(x+3) \neq 0$ el argumento no debe ser 1; de donde, $x \neq -2$

En consecuencia:

$$Df(x) = (-3; -2) \cup (-2; +\infty)$$

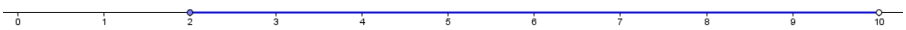


4.3 $f(x) = \sqrt{x-2} + \log(10-x)$ Planteamos la restricción para la raíz cuadrada y para el logaritmo

$$x - 2 \geq 0 \quad y \quad 10 - x > 0$$
$$x \geq 2 \quad\quad y \quad\quad 10 > x$$

En consecuencia:

$$Df(x) = [2; 10)$$



4.4 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad -1 \leq x < 2 \\ 9 - x^2 & si \quad\quad x \geq 2 \end{cases}$

El dominio de f es la unión de los intervalos dados en la definición de la función:

$$Df(x) = [-1, 2) \cup [2, +\infty) \text{ ó}$$
$$Df(x) = [-1, +\infty)$$

4.5 $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{4}}{x + \frac{1}{2}}$

El denominador debe ser distinto de 0, por lo que:

$$x + \frac{1}{2} \neq 0$$
$$x \neq -\frac{1}{2}$$

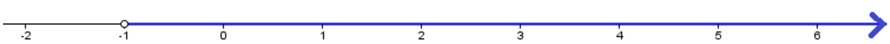
En consecuencia:

$$Df(x) = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

4.6 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad -1 < x < 2 \\ 5 & si \quad\quad x \geq 2 \end{cases}$

El dominio de f es la unión de los intervalos dados en la definición de la función:

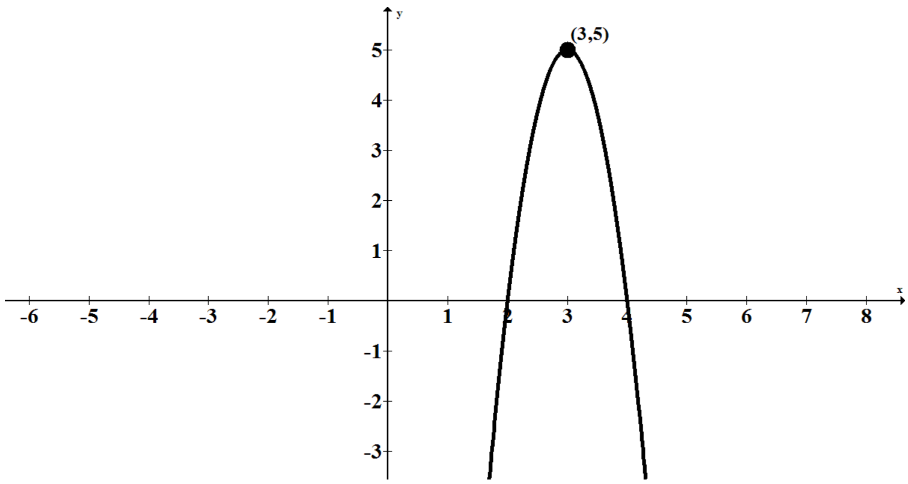
$$Df(x) = (-1, 2) \cup [2, +\infty)$$
$$Df(x) = (-1, +\infty)$$



IV. Función real de variable real

1. Determina la expresión analítica de las siguientes funciones.

1.1 .

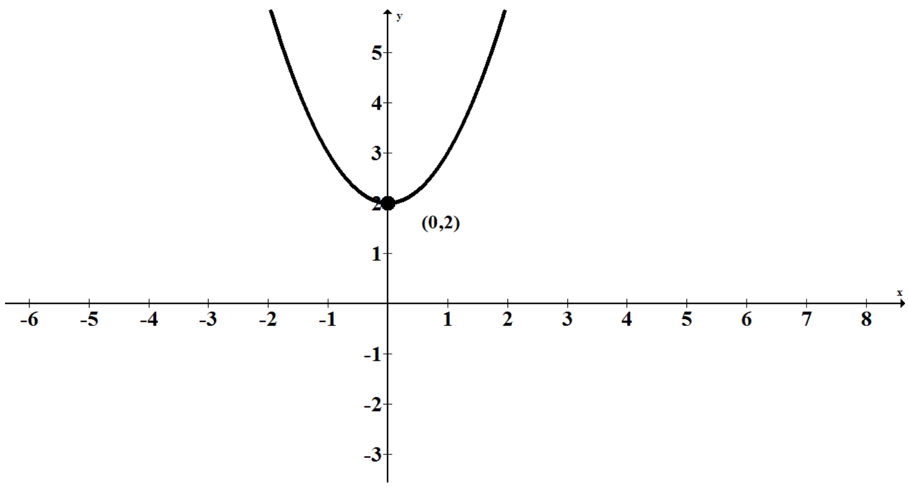


$$\text{Vértice: } V = (3,5) \Rightarrow y = a(x-3)^2 + 5$$

$$\text{Raíces: } (2,0) \text{ y } (4,0) \quad \text{como } (2,0)\epsilon f \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + 5 \Rightarrow a = -5$$

$$\therefore y = -5(x-3)^2 + 5$$

1.2 .

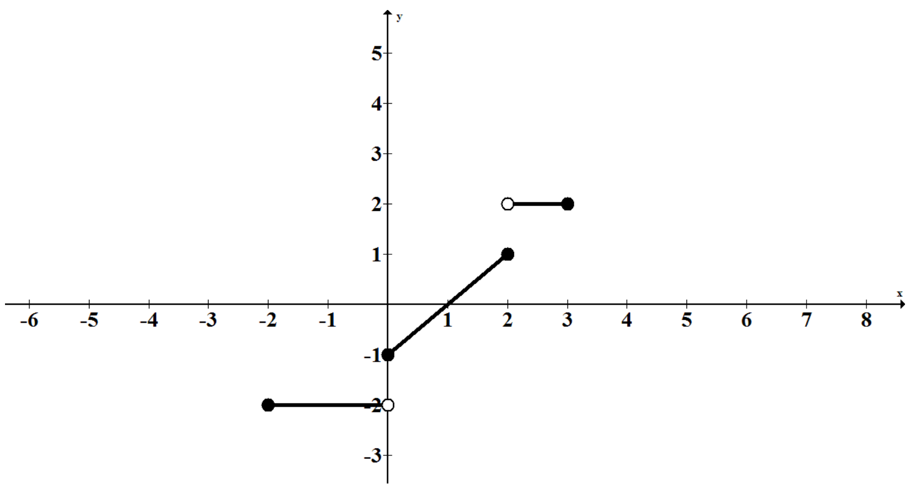


$$V : (0,2) \therefore y = a(x)^2 + 2$$

$$\text{Pasa por } (1,3) \Rightarrow 3 = a.(1) + 2 \Rightarrow 1 = a$$

$$y = x^2 + 2$$

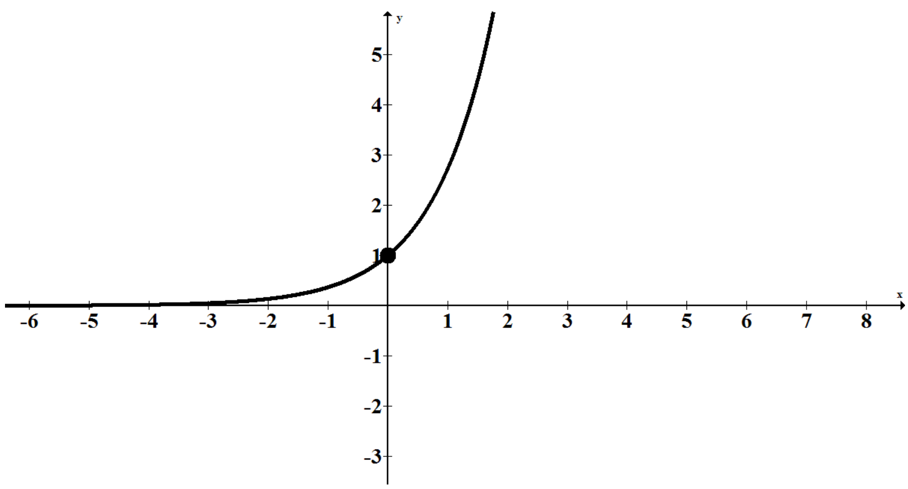
1.3 .



Planteamos la expresión analítica de la función por partes:

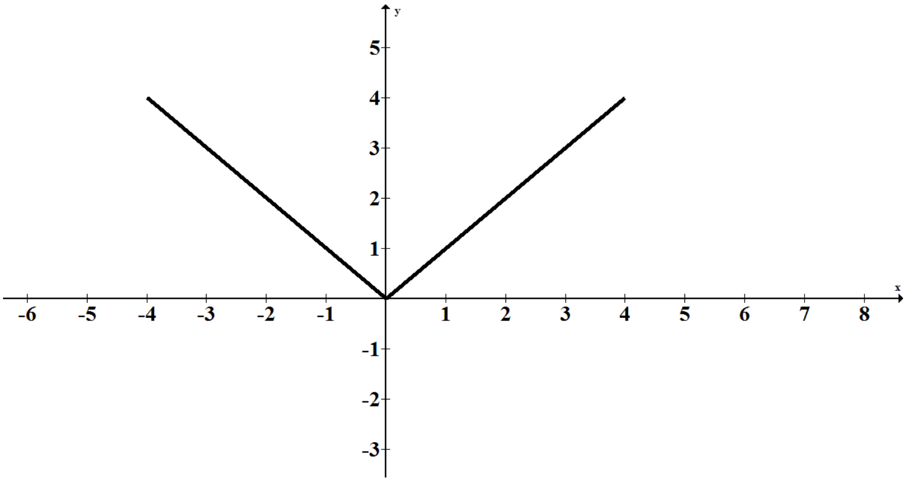
$$f(x) = \begin{cases} -2 & -2 \leq x < 0 \\ x-1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

1.4 .



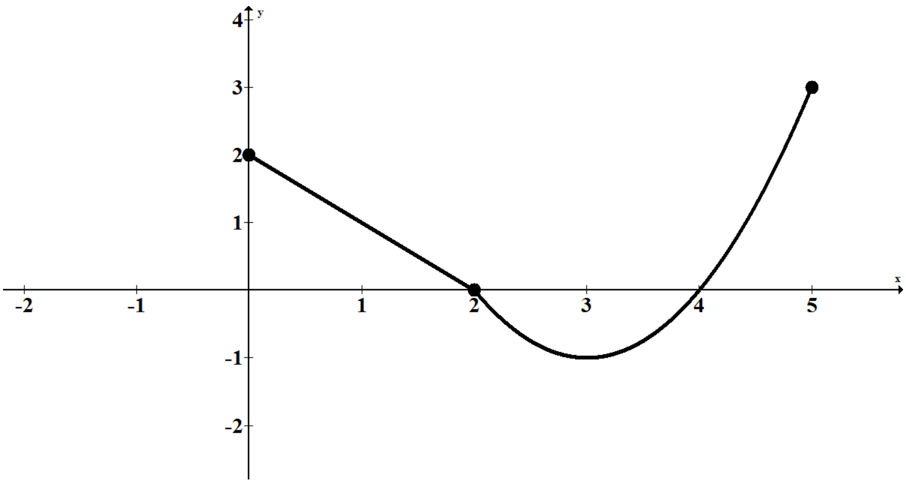
$$y = e^x$$

1.5 .



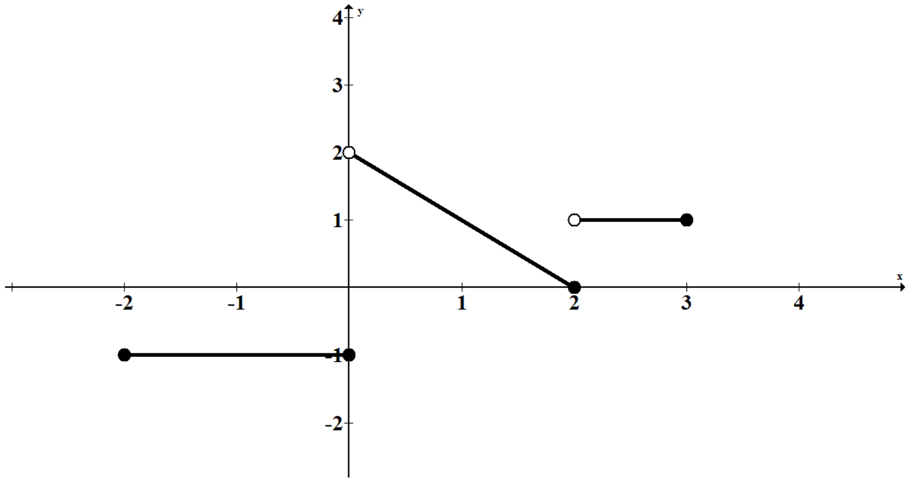
$$y = | x |$$

1.6 .



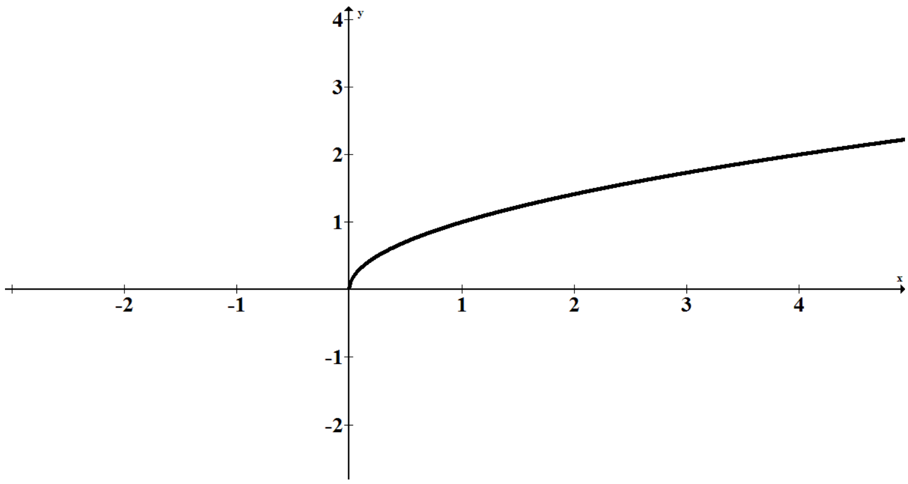
$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & 0 \leq x \leq 2 \\ (x-3)^2 - 1 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

1.7 .



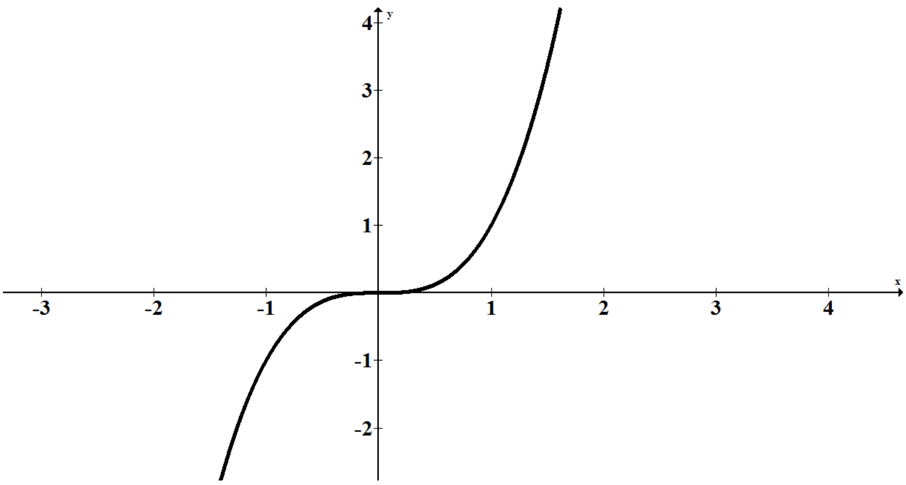
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \le x \le 0 \\ -x+2 & 0 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

1.8 .



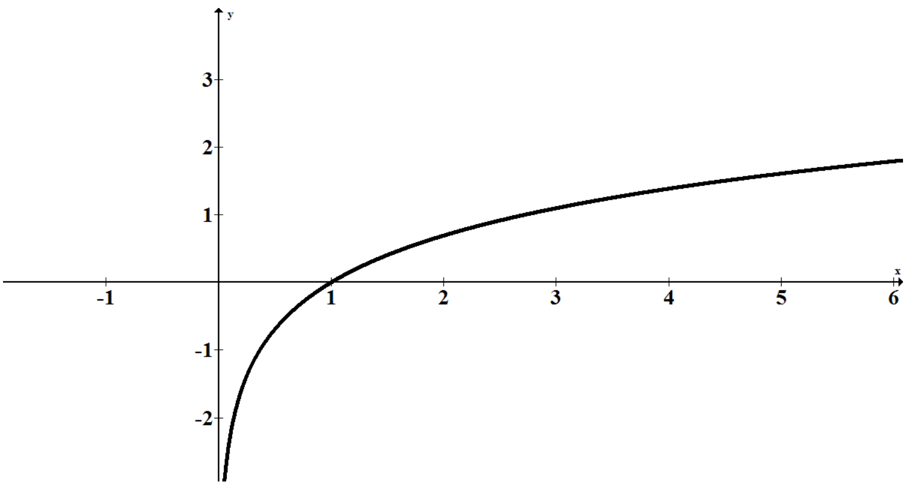
$$f(x) = \sqrt{x}$$

1.9 .



$f(x) = x^3$

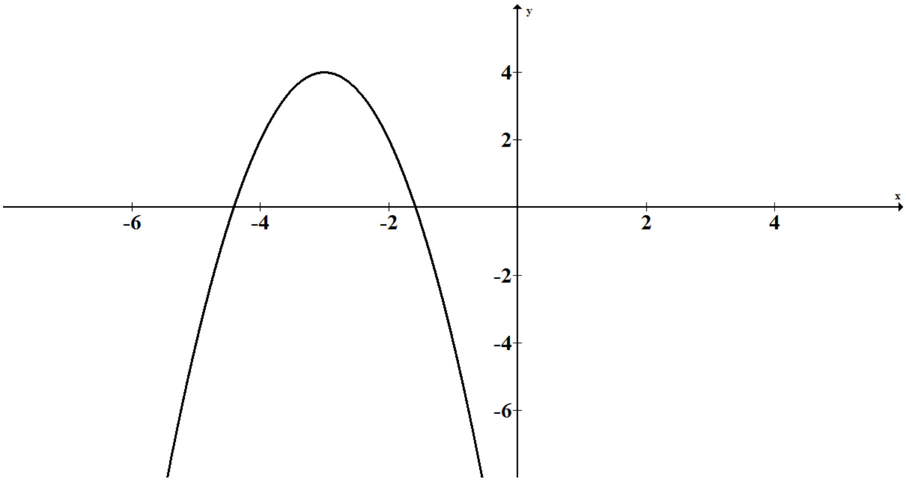
1.10 .



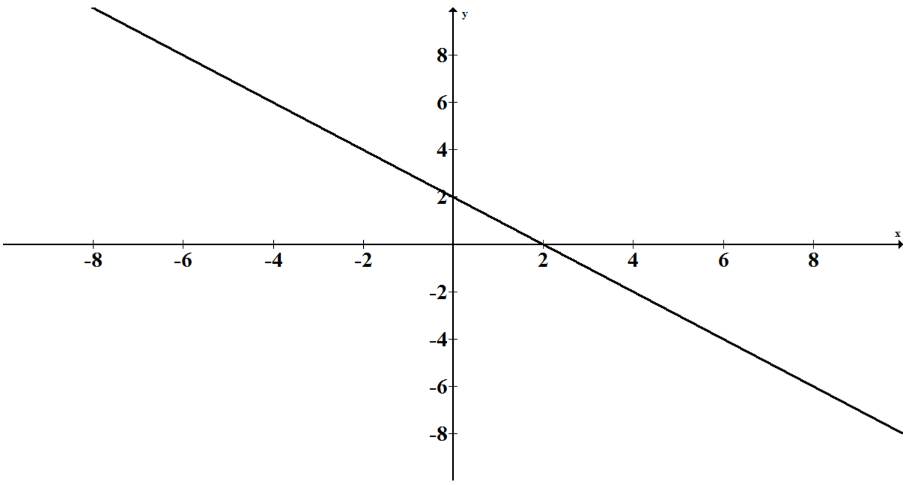
$f(x) = \ln x$

2. Representa gráficamente las siguientes funciones.

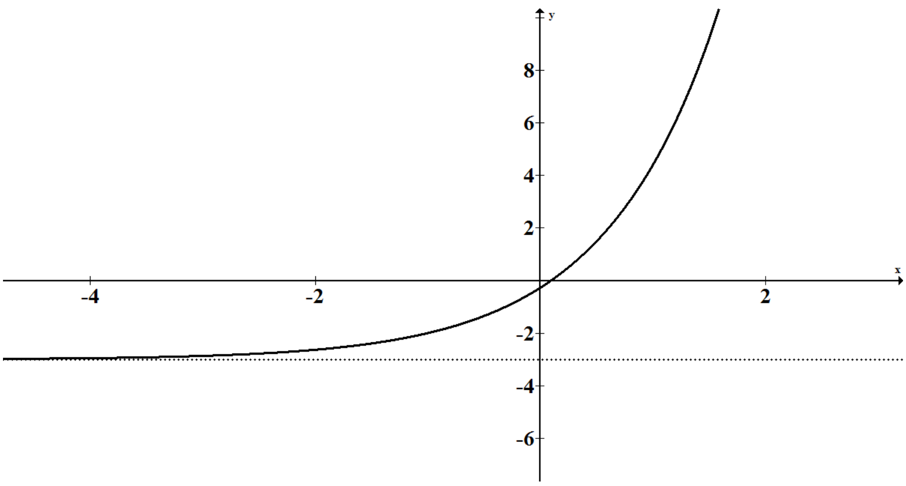
2.1 $f(x) = -2(x+3)^2 + 4$



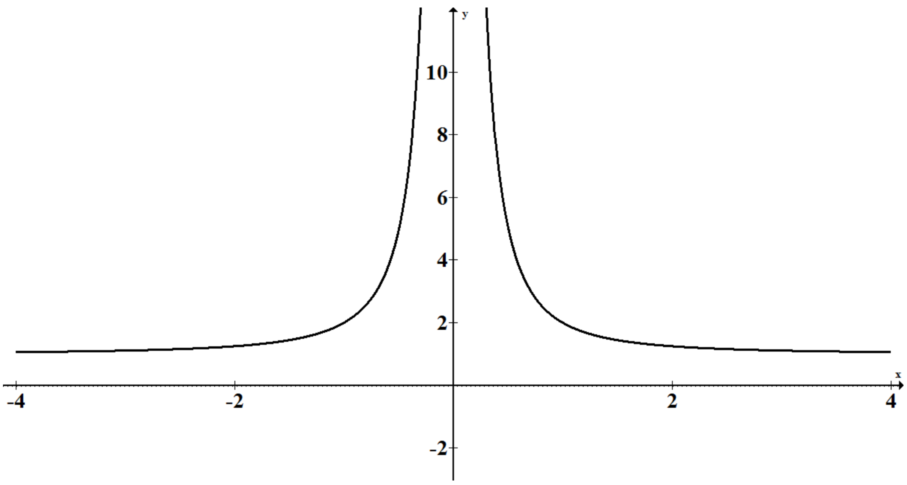
2.2 $x + y - 2 = 0$



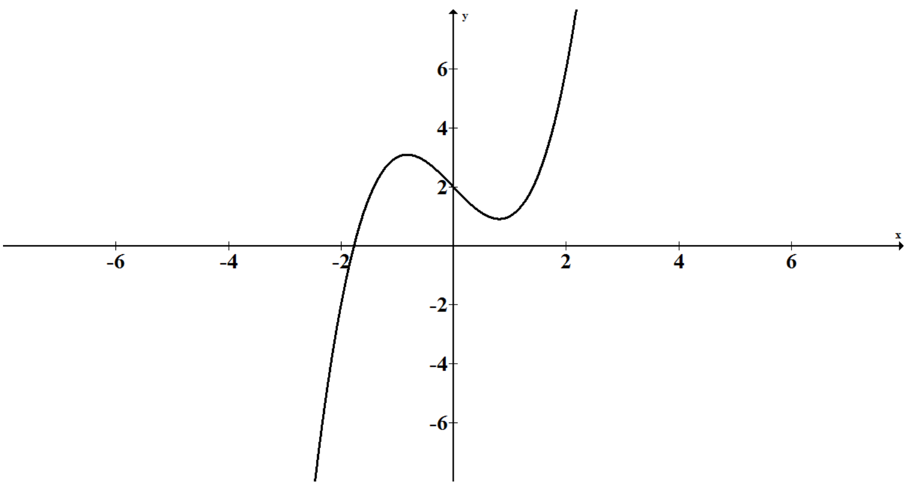
2.3 $f(x) = e^{x+1} - 3$



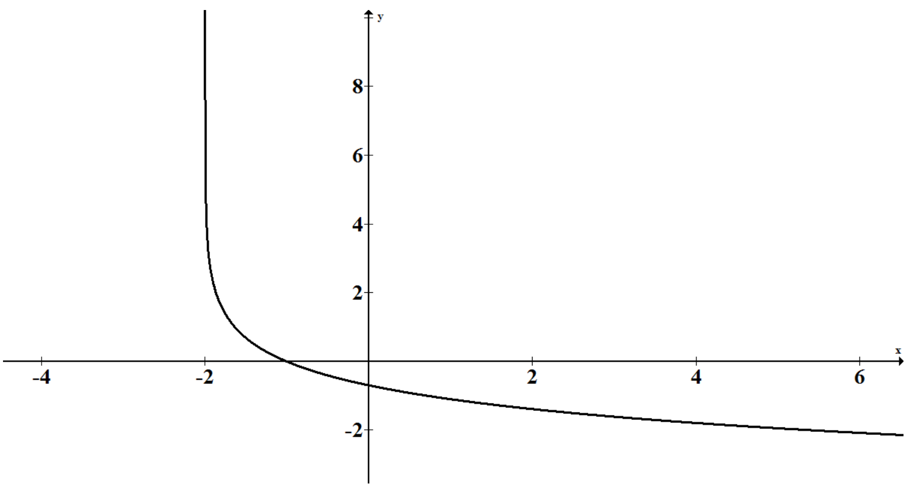
2.4 $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$



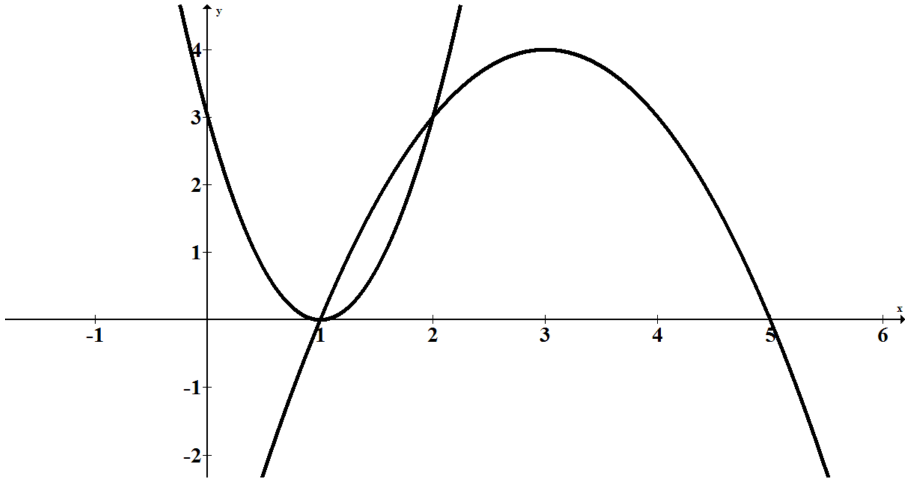
2.5 $f(x) = x^3 - 2x + 2$



2.6 $f(x) = -\ln(x+2)$



3. Identifica el gráfico de $f : R \to R/f(x) = 3 - 6x + 3x^2$ y $g : R \to R/h(x) = -5 + 6x - x^2$. Determina los puntos de intersección entre las funciones f y g, aproximando a dos decimales si es necesario.



$f(x) = 3 - 6x + 3x^2$ es la parábola que abre hacia arriba (a>0) y $g(x) = -5 + 6x - x^2$ es la que abre hacia abajo (a<0).

Para hallar los puntos de intersección entre ambas funciones, planteamos $f(x) = g(x)$. Resolvemos como se muestra a continuación:

$$3 - 6x + 3x^2 = -5 + 6x - x^2$$
$$8 - 12x + 4x^2 = 0$$
$$4(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4.(2)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \text{ entonces } x_1 = 2 \text{ y } x_2 = 1$$

Puntos de intersección: $(1, 0)$ y $(2, 3)$

V. Problemas de aplicación

1. La compañía ABC produce calculadoras de mano que vende a \$ 20 cada una. El material y la mano de obra para hacer una calculadora cuesta \$ 16 y la compañía tiene costos fijos de \$ 8.500.

   1.1 Escriba una ecuación para la ganancia ¨ G ¨ de la compañía, para un año en que produce y vende ¨x¨ calculadoras.

Ganancia(G) = Ingreso Total(IT) - Costo total(CT)

Costo total (CT) = Costo fijo + Costo variable

Si x representa la cantidad de calculadoras que se producen y venden entonces:

$$IT = 20x \;\; ; \;\; CT = 16x + 8500$$
$$G = 20x - 16x - 8500 = 4x - 8500$$

1.2 ¿Cuál es la ganancia anual si sólo se producen 4.000 calculadoras?

Evaluamos la función utilidad en $x = 4000 \Rightarrow G(4000) = 7500$ Respuesta: La ganancia anual, si se producen 4000 calculadoras es \$7500

2. A un fabricante le cuesta \$ 500 comprar las herramientas a fin de producir cierto artículo doméstico. Si tiene un costo de 60 centavos por el material y la mano de obra de cada artículo producido y el fabricante puede vender todo lo que produce a 90 centavos cada uno, ¿cuántos artículos deberá producir para obtener una ganancia de por lo menos \$ 2500?

La función Ganancia está dada por:

$$G(x) = 0,90x - 0,6x - 500$$

Resolviendo $G(x) \geq 2500$ obtenemos $\Rightarrow x \geq 10000$

Respuesta: Deberá producir al menos 10000 artículos.

3. Luego de realizar un estudio en planta se tienen los siguientes datos relativos a un determinado producto de una fábrica. El precio unitario de venta es de \$ 15; los costos variables por unidad \$ 10; los costos fijos \$ 300.000. Determinar la cantidad de unidades que deben venderse para que la ganancia sea de \$ 150.000.

La función ganancia está dada por:

$$G(x) = 15x - 10x - 300000$$
$$\text{Y dado que } G(x) = 150000$$
$$150000 = 15x - 10x - 300000$$
$$5x - 300000 = 150000$$
$$x = 90000$$

Respuesta: Se deben vender 90000 unidades.

4. Rodríguez tiene ingresos de \$30.000 de los negocios que heredó, paga impuestos del 28 % sobre el total de sus ingresos; e invierte parte de lo que le queda al 10 % anual y el resto al 12 % anual.

¿Qué monto invierte a cada tasa si los réditos totales debido a estas inversiones son de \$2.360?

Calculamos: 28 % de 30000 = 8400

La resta después de pagar los impuestos es: \$21600

Si llamamos x al capital que invierte al 10 % anual y, $(21600 - x)$ a la suma invertida al 12 % anual, entonces:

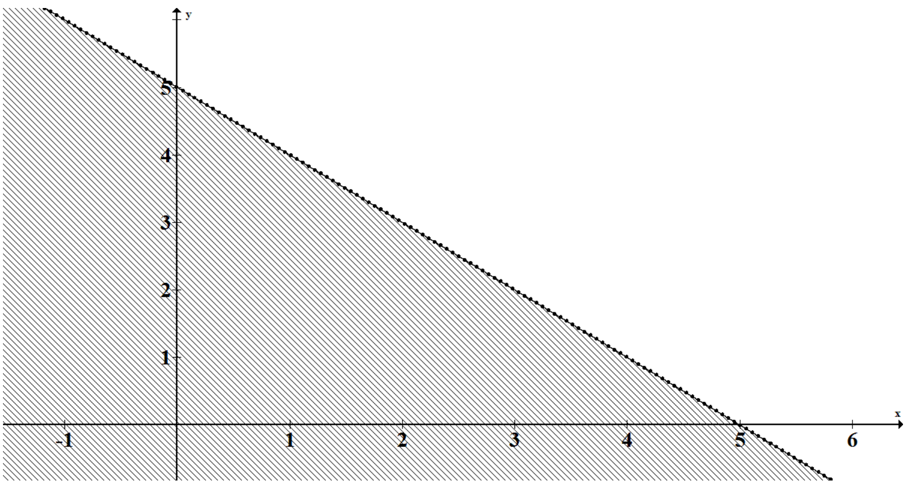
$$0,10x + 0,12(21600 - x) = 2360$$
$$0,10x + 2592 - 0,12x = 2360$$
$$-0,02x = -232$$
$$x = 11600$$

Respuesta: Invierte \$11600 al 10 % y \$10000 al 12 % anual.

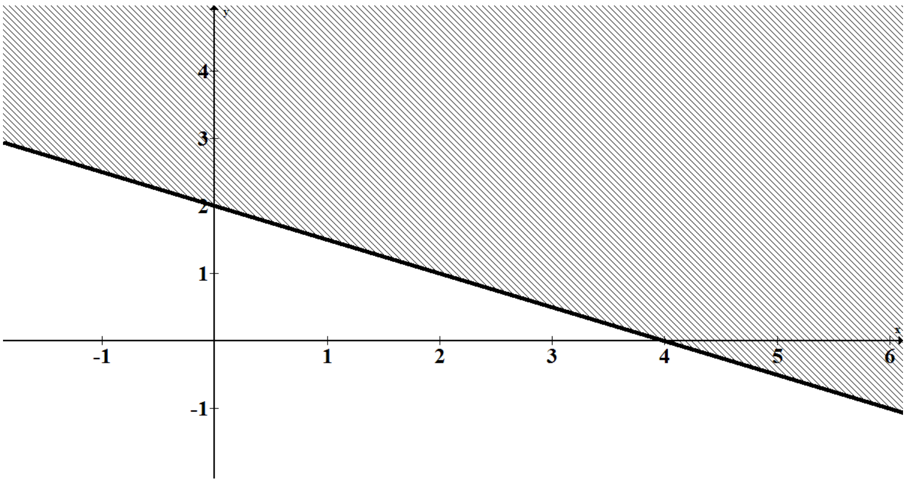
VI. Ejercicios adicionales

1. Representa gráficamente las siguientes inecuaciones.

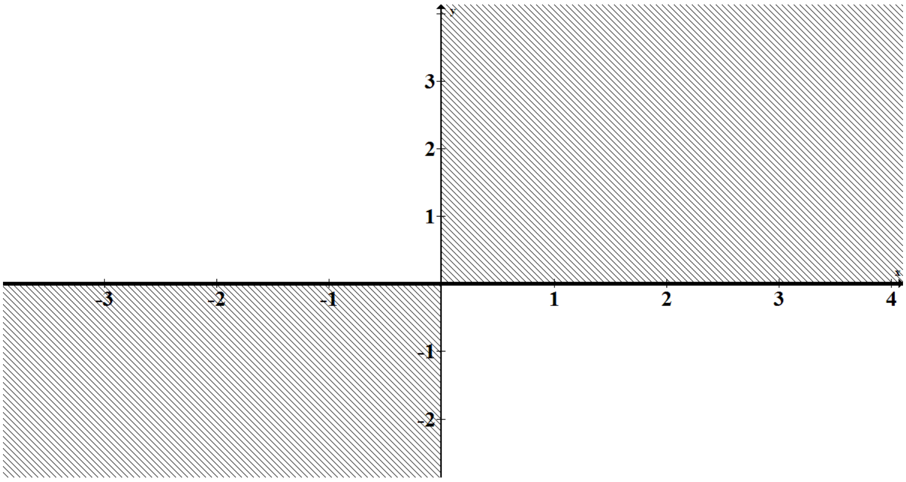
1.1 $x - 5 + y < 0$



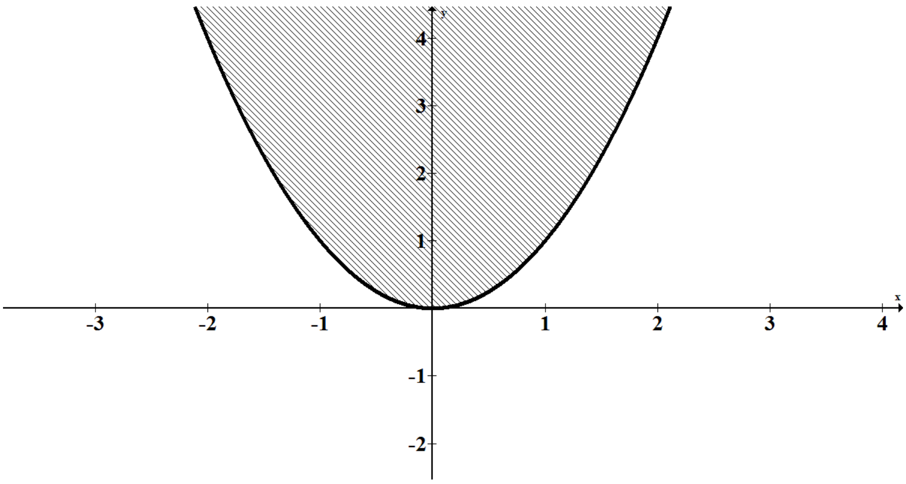
1.2 $x + 2y \geq 4$



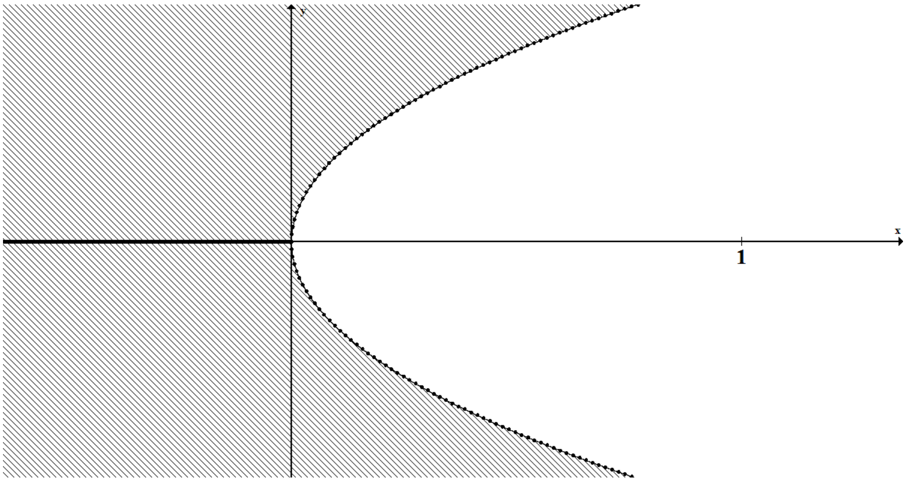
1.3 $xy \geq 0$



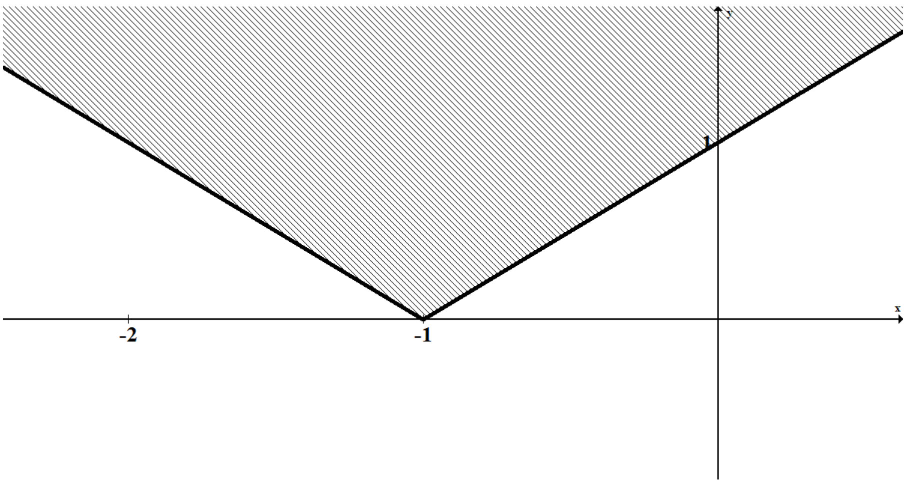
1.4 $y - x^2 \geq 0$



1.5 $y^2 - x > 0$



1.6 $y \geq |x+1|$



2. ¿Cuál es el valor de $\frac{a-c}{c} + \frac{a+c}{c} - \frac{2a}{c}$ sabiendo que $c \neq 0$?

$$\frac{a-c+a+c-2a}{c}$$

$$\frac{2a-2a}{c} \Rightarrow \frac{0}{c} \Rightarrow 0$$

6. ¿Para qué valor de n, la expresión $\frac{2n}{3n-1}$ representa el número $\frac{5}{7}$?

$$2n = (\tfrac{5}{7}).(3n-1)$$

$$2n = \tfrac{15}{7}n - \tfrac{5}{7}$$

$$-\tfrac{1}{7}n = -\tfrac{5}{7}$$

$$n = \frac{-\frac{5}{7}}{-\frac{1}{7}} \;\Rightarrow\; n = 5$$

7. ¿Cuál es el mayor número entero que satisface $\sqrt{2} - x \geq 0$?

$$\sqrt{2} \geq x$$

y como $\sqrt{2} \cong 1,414213$;

$$1,414213 \geq x$$

El mayor número que satisface la inecuación es 1.